Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física
FIS1533 Electricidad y Magnetismo
Profesor: Máximo Bañados
Ayudante: Felipe Canales, correo: facanales@uc.cl

Ayudantía 11

Problema 1. Considere un cascarón esférico de radio interno a y radio externo b con polarización

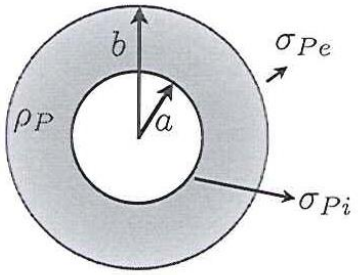
$$\vec{P}_{(\vec{r})} = \frac{\beta}{r}\hat{r}$$

Encuentre el campo eléctrico de las siguientes formas:

Forma 1
(a) Encuentre las densidades de carga volumétrica y superficiales de carga polarizada.
(b) Encuentre el potencial $V_{(r)}$ en todo el espacio.
(c) Encuentre el campo eléctrico.

Forma 2
(a) Encuentre las densidades de carga volumétrica y superficiales de carga polarizada
(b) Encuentre el campo eléctrico por ley de gauss

Forma 3
(a) Encuentre el campo eléctrico utilizando ley de gauss para dieléctrico



Forma 1

(a) Por definición las densidades de carga volumétrica y superficiales de polarización son (la divergencia se considera en coordenadas esféricas
$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot A_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)A_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$ y solo se toma en cuenta la parte radial):

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\beta}{r}\right) = -\frac{\beta}{r^2}$$

$$\sigma_{Pi} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{\beta}{a}\hat{r} \cdot -\hat{r} = -\frac{\beta}{a}$$
$$\sigma_{Pe} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{\beta}{b}\hat{r} \cdot \hat{r} = \frac{\beta}{b}$$

(b) Calculamos el potencial

$$V_{(\vec{r})} = \int \frac{K}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int \frac{\rho_P}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \int \frac{\sigma_{Pi}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA' + \int \frac{\sigma_{Pe}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA'\right)$$

Calculemos la primera integral ($\vec{r}$ es una posición fija y $\vec{r}'$ barre por toda la distribución de carga)

$$\int \frac{\rho_{P(\vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -\frac{\beta}{r'^2} \cdot \frac{r'^2 \sin(\phi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\phi'))^{1/2}} d\phi'\, d\theta'\, dr'$$
$$= -2\pi\beta \int_a^b \int_0^{\pi} \frac{\sin(\phi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\phi'))^{1/2}} d\phi'\, dr'$$

La integral $\int_0^{\pi} \frac{\sin(\phi')}{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\phi')} d\phi'\, dr'$ tiene dos soluciones dependiendo del caso

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(\phi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\phi'))^{1/2}} d\phi' = \begin{cases} \frac{2}{r} & r > r' \\ \frac{2}{r'} & r < r' \end{cases}$$

Entonces (recordar que r' barre entre a y b ($a < r' < b$))

$$\int \frac{\rho_{P(\vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \begin{cases} -\frac{4\pi\beta}{r}\int_a^R dr' = -\frac{4\pi\beta(R-a)}{r} = -\frac{4\pi\beta R}{r} + \frac{4\pi\beta a}{r} & r > r' \\ -4\pi\beta \int_R^b \frac{1}{r'} dr' = -4\pi\beta \ln\left(\frac{b}{R}\right) & r < r' \end{cases}$$

La segunda integral en el cálculo del potencial:

$$\int \frac{\sigma_{Pi(\vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -\frac{\beta}{a} \cdot \frac{a^2 \sin(\phi')}{(r^2 + a^2 - 2ra\cos(\phi'))^{1/2}} d\phi'\, d\theta'$$
$$= -2\pi\beta a \int_0^{\pi} \frac{\sin(\phi')}{(r^2 + a^2 - 2ra\cos(\phi'))^{1/2}} d\phi' = \begin{cases} -\frac{4\pi\beta a}{r} & r > a \\ -4\pi\beta & r < a \end{cases}$$

La tercera integral en el cálculo del potencial

$$\int \frac{\sigma_{Pe\,(\vec{r}')}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dA' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\beta}{b}\cdot\frac{b^2\sin(\phi')}{(r^2+b^2-2rb\cos(\phi'))^{1/2}}d\phi'\,d\theta' = 2\pi\beta b\int_0^{\pi}\frac{\sin(\phi')}{(r^2+b^2-2rb\cos(\phi'))^{1/2}}d\phi'$$
$$= \begin{cases} \dfrac{4\pi\beta b}{r} & r > b \\ 4\pi\beta & r < b \end{cases}$$

Entonces tenemos el potencial en 3 zonas distintas

Para $r < a$

$$V_{(r)} = -\frac{\beta}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{\beta}{\varepsilon_0} + \frac{\beta}{\varepsilon_0} = -\frac{\beta}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Para $a < r < b$

$$V_{(r)} = -\frac{\beta}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{r}\right) - \frac{\beta}{\varepsilon_0} + \frac{\beta a}{\varepsilon_0 r} - \frac{\beta a}{\varepsilon_0 r} + \frac{\beta}{\varepsilon_0} = -\frac{\beta}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{r}\right)$$

Para $r > b$

$$V_{(r)} = -\frac{\beta b}{\varepsilon_0 r} + \frac{\beta a}{\varepsilon_0 r} - \frac{\beta a}{\varepsilon_0 r} + \frac{\beta b}{\varepsilon_0 r} = 0$$

(c) El campo eléctrico a partir del potencial se obtiene como (gradiente en coordenadas esféricas $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{1}{r\sin(\phi)}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta}$)

$$\vec{E} = -\nabla \mathrm{V} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = \begin{cases} \vec{0} & r < a \\ -\dfrac{\beta}{\varepsilon_0 r}\hat{r} & a < r < b \\ \vec{0} & r > b \end{cases}$$

Forma 2

(a) Al igual que en la Forma 1, por definición las densidades de carga volumétrica y superficiales de polarización son (la divergencia se considera en coordenadas esféricas $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot A_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta)A_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$ y solo se toma en cuenta la parte radial):

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\beta}{r}\right) = -\frac{\beta}{r^2}$$
$$\sigma_{Pi} = \vec{P}\cdot\hat{n} = \frac{\beta}{a}\hat{r}\cdot -\hat{r} = -\frac{\beta}{a}$$
$$\sigma_{Pe} = \vec{P}\cdot\hat{n} = \frac{\beta}{b}\hat{r}\cdot\hat{r} = \frac{\beta}{b}$$

(b) Por ley de gauss tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Por la simetría esférica del problema

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Pero Q es la integral de las densidades de carga y se distinguen 3 regiones

Para $r < a$

$$Q = \int \rho_P \, dV = 0$$

Para $a < r < b$

$$\begin{aligned} Q = \int \rho_P \, dV + \oint \sigma_{Pi} \, dA &= \int_a^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -\frac{\beta}{r^2} \cdot r^2 \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta \, dr + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -\frac{\beta}{a} \cdot a^2 \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= -4\pi\beta(r-a) - 4\pi\beta a = -4\pi\beta r \end{aligned}$$

Para $r > b$

$$\begin{aligned} Q = \int \rho_P \, dV + \oint \sigma_{Pi} \, dA + \oint \sigma_{Pe} \, dA \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -\frac{\beta}{r^2} \cdot r^2 \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta \, dr + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -\frac{\beta}{a} \cdot a^2 \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\beta}{b} \cdot b^2 \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta = -4\pi\beta(b-a) - 4\pi\beta a + 4\pi\beta b = 0 \end{aligned}$$

Entonces el campo eléctrico nos queda

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \begin{cases} \vec{0} & r < a \\ -\dfrac{\beta}{\varepsilon_0 r}\hat{r} & a < r < b \\ \vec{0} & r > b \end{cases}$$

Forma 3

(a) Por ley de gauss tenemos

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{libre} = 0$$

Por la simetría esférica del problema

$$4\pi r^2 D = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \vec{0}$$

De la definición de desplazamiento eléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{P} = \begin{cases} \vec{0} & r < a \\ -\dfrac{\beta}{\varepsilon_0 r}\hat{r} & a < r < b \\ \vec{0} & r > b \end{cases}$$

Problema 2. Una esfera de radio a se carga a potencial V_0 y se aísla. Posteriormente se conecta con la Tierra a través de un condensador cuya capacidad es C. (Por definición la tierra está a potencial cero independientemente de la carga que adquiera). Calcule el potencial final de la esfera, la carga en la esfera y en el condensador. ¿Cuánta energía se disipó al hacer conexión a Tierra?

La carga inicial de la esfera es fácil de obtener ya que nos dan como dato el potencial. Como el potencial a distancia r generado por una esfera conductora cargada es

$$V_{(r)} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Tenemos que en la superficie

$$Q_i = 4\pi\varepsilon_0 a V_0$$

Ahora, al conectar la esfera a una de las placas del condensador, ambos conductores quedan al mismo potencial V_f. Además, como el otro conductor que compone al condensador está conectado a tierra, este se encuentra a potencial cero. Luego, la diferencia de potencial entre las placas del condensador es V_f. Si llamamos Q_f a la carga final de la esfera y Q_C a la del condensador, se cumple que:

$$Q_i = Q_f + Q_c$$
$$Q_f = 4\pi\varepsilon_0 a V_0$$
$$Q_c = C V_f$$

La primera relación es la conservación de carga entre la esfera y la placa del condensador conectada a esta. Recordemos que en un condensador (cargado) no hay traspaso de carga entre los conductores constituyentes. La segunda ecuación relaciona la carga de la esfera con el potencial. Aquí estamos asumiendo que la esfera es suficientemente grande como para despreciar el efecto del campo eléctrico generado por el condensador. La ultima ecuación relaciona la carga y el potencial del condensador. Así, tenemos tres ecuaciones para las tres incógnitas Q_f, Q_C y V_f. Resolviendo el sistema y reemplazando el valor de Q_i encontramos:

$$V_f = \frac{4\pi\varepsilon_0 a V_0}{C + 4\pi\varepsilon_0 a}$$
$$Q_c = \frac{4\pi\varepsilon_0 a V_0 C}{C + 4\pi\varepsilon_0 a}$$
$$Q_f = \frac{(4\pi\varepsilon_0 a)^2 V_0}{C + 4\pi\varepsilon_0 a}$$

La energía inicial del sistema es la energía almacenada en el campo eléctrico de la esfera conductora

$$U_i = \frac{Q_i V_0}{2}$$

La energía final es la almacenada en el campo eléctrico de la esfera (luego de conectarse a tierra) más la energía almacenada en el campo eléctrico del condensador

$$U_f = \frac{Q_f V_f}{2} + \frac{Q_c V_f}{2}$$

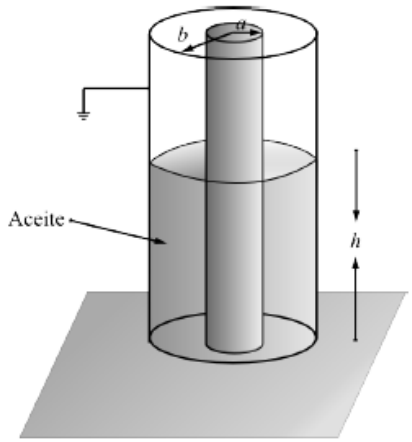
Luego, la energía disipada viene dada por:

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{Q_f V_f}{2} + \frac{Q_c V_f}{2} - \frac{Q_i V_0}{2} = \frac{(Q_f + Q_c)V_f}{2} - \frac{Q_i V_0}{2} = \frac{Q_i V_f}{2} - \frac{Q_i V_0}{2} = \frac{Q_i(V_f - V_0)}{2}$$

Reemplazando los valores de Q_i y V_f obtenemos:

$$\Delta U = \frac{Q_i(V_f - V_0)}{2} = 2\pi\varepsilon_0 a V_0 \left(V_0 - \frac{4\pi\varepsilon_0 a V_0}{C + 4\pi\varepsilon_0 a}\right)$$

Problema 3. Un condensador cilíndrico de carga Q, cuyos radios interno y externo son a y b respectivamente, es introducido verticalmente en un líquido dieléctrico (lineal) de permitividad ε. Suponga que el conductor externo se encuentra conectado a tierra, y el conductor interno está a un potencial fijo V. Suponiendo que el líquido dieléctrico ha subido una altura h, y que la densidad de masa del líquido es ρ_0, determine una ecuación para encontrar h.



La capacitancia de dos cilindros coaxiales con vacío intermedio, por ayudantía 7 es

$$C_v = \frac{2\pi\varepsilon_0(L-h)}{\ln(b/a)}$$

Para cilindros coaxiales con dieléctrico como medio entre cilindros es

$$C_d = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln(b/a)}$$

La energía almacenada en cada uno es

$$U_v = \frac{CV^2}{2} = \frac{V^2\pi\varepsilon_0(L-h)}{\ln(b/a)}$$
$$U_d = \frac{V^2\pi\varepsilon h}{\ln(b/a)}$$

Entonces la energía total del sistema es

$$U = U_v + U_d = \frac{V^2\pi\varepsilon_0(L-h)}{\ln(b/a)} + \frac{V^2\pi\varepsilon h}{\ln(b/a)} = \frac{V^2\pi}{\ln(b/a)}\left(\varepsilon_0 L + h(\varepsilon-\varepsilon_0)\right)$$

La fuerza del sistema producida para reducir su energía

$$\overrightarrow{F_U} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial h}\hat{k} = \frac{V^2\pi(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\ln(b/a)}\hat{k}$$

Entonces esa fuerza de subida del líquido debe igualarse a la fuerza de gravedad para que haya equilibrio

$$\overrightarrow{F_g} = \mathrm{m}\vec{g} = \rho\bar{V}\vec{g} = \rho_0\pi(b^2-a^2)h\vec{g} = -g\rho\pi(b^2-a^2)h\hat{k}$$

$$\overrightarrow{F_U} = -\overrightarrow{F_g} \quad \Rightarrow \quad \frac{V^2\pi(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\ln(b/a)} = g\rho\pi(b^2-a^2)h$$

Entonces

$$h = \frac{V^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{g\rho(b^2-a^2)\ln(b/a)}$$